Introduction à la représentation de signaux périodiques en fonction de sommes de sinusoïdes

Informations
Ceci est un travail dirigé. C'est un laboratoire théorique qui a pour but d'apprendre les bases de l'analyse de Fourier des signaux périodiques. Vous pouvez en faire des parties individuellement et d'autres en équipe avec d'autres dans la classe. Le professeur ou la professeure sont aussi là pour vous aider si vous êtes bloqué.
Ce travail dirigé n'a pas de note mais il y aura des questions sur cette matière dans les évaluations.

Introduction
Les signaux périodiques physiques peuvent être représentées comme des sommes de sinus et cosinus plus une constante.

Pour une fonction $s(t)$, une telle représentation est appelée la série de Fourier de la fonction.

L'hypothèse est que la fonction est égale à la somme de sinus et cosinus suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \qquad (1)$$

Dans cette équation,
$$\omega = 2\pi f, \qquad (2)$$

f étant la fréquence fondamentale qui peut s'exprimer en fonction de la période par

$$f = \frac{1}{T}. \qquad (3)$$

Les coefficients a_0, a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier.

Calcul des coefficients de Fourier

Nous allons commencer par une partie intuitive et nous arriverons aux équations utilisées pour calculer les coefficients de Fourier dans un second temps. Pour celles et ceux qui sont très à l'aise avec les le calcul intégral, la partie appelée « ludique » peut sembler un peu trop simple. Pour les autres, elle clarifiera un peu l'origine des séries de Fourier, dont les fonctions de base sont des sinus et des cosinus, et d'autres séries qui utilisent des bases différentes.

Partie ludique

Prenons l’équation (1) et écrivons-la de la manière suivante :

$$s(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t) + \cdots$$
$$+ b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + b_3\sin(3\omega t) + \cdots \qquad (4)$$

On voit que côté droit, il y a trois types de termes :

1. Un terme constant (a_0)
2. Des termes en cosinus ($a_1\cos(\omega t), a_2\cos(2\omega t)$, …)
3. Des termes en sinus ($b_1\sin(\omega t), b_2\sin(2\omega t)$, …)

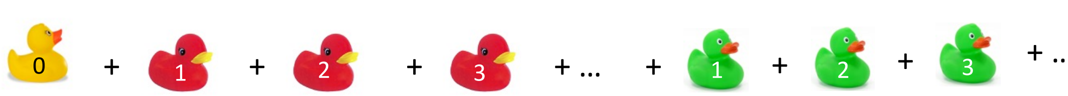
Assignons (rappelez-vous que c’est la partie ludique) un canard en caoutchouc d’une couleur différente à chacun des types de termes comme à la figure suivante :

Terme constant : 

Terme en cosinus : 

Terme en sinus : 

On peut écrire l’équation (4) en fonction des canards comme suit :

$s(t) =$ 

Si nous avions une arme de feu capable de faire couler seulement les canards rouges et les verts, il n’en resterait que le jaune. Puisque le canard jaune est le terme constant a_0, cette arme nous permettrait d’isoler et donc d’obtenir le terme constant.
On pourrait utiliser un rifle spécial comme celui de la figure ci-dessous qui a des balles spéciales pour ne toucher que les canards des couleurs rouge et verte :

Mais revenons au problème mathématique qui nous occupe. Au lieu d'un rifle, on va utiliser des multiplications et des intégrales.

Calcul des coefficients

Pour calculer les coefficients de Fourier qui apparaissent au côté droit de l'équation (1), nous allons donc utiliser des intégrales qui, comme le rifle de la partie ludique que nous venons de voir, vont nous permettre d'annihiler toutes les valeurs sauf celles qui nous intéressent.

Calcul de a_0

D'abord, utilisons l'opération intégrale comme suit : calculons l'intégrale des deux côtés de (1) :

$$\int_0^T s(t)dt = \int_0^T [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)]\ dt \qquad (5)$$

Puisque l'intégrale de la somme est la somme des intégrales, nous avons un nombre infini d'intégrales à droite. Il y a cependant seulement trois types d'intégrales qui y apparaissent, un pour chaque type de term :

$$\int_0^T a_0 dt \qquad (6)$$

$$\int_0^T a_n \cos(n\omega t)\, dt \qquad (7)$$

et

$$\int_0^T b_n \sin(n\omega t)\, dt \qquad (8)$$

Calculez la valeur de chacune de ces intégrales vous souvenant que $\omega = 2\pi f$ et que $f = \frac{1}{T}$. Vous pouvez les chercher dans une table d'intégrales par Internet.

Une fois que vous les aurez trouvées, contrôlez avec le professeur ou à la professeure que vous avez obtenu les bons résultats avant de continuer.

Calcul de a_1

Calculons de nouveau l'intégrale des deux côtés de (1) mais, cette fois-ci, multiplions d'abord les deux côtés par $\cos(\omega t)$:

$$\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt = \int_0^T \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)\right)\cos(\omega t)\, dt \quad (9)$$

Nous avons de nouveau seulement trois types d'intégrales à droite :

$$\int_0^T a_0 \cos(\omega t)dt \quad (10)$$

$$\int_0^T a_n \cos(n\omega t)\cos(\omega t)\, dt \quad (11)$$

et

$$\int_0^T b_n \sin(n\omega t)\cos(\omega t)\, dt \quad (12)$$

Si vous ne connaissez pas ces intégrales, cherchez-les dans une table d'intégrales et donnez leurs valeurs.

Une fois que vous les aurez trouvées, montrez-les au professeur ou à la professeure.

Formules pour le calcul des coefficients de Fourier :

Le professeur ou professeure vous expliquera comment utiliser les résultats obtenus jusqu'à maintenant. Les formules générales pour le calcul des coefficients de Fourier sont les suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{s}(t)dt \quad (13)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{s}(t)\cos(n\omega t)dt \quad (14)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{s}(t)\sin(n\omega t)dt \quad (15)$$

Vous pourrez les appliquer dans un exercice à la page suivante.

MRI 23 PHT

Exercice :

a. Faite un sketch de la fonction périodique, dont une des périodes est donnée par l'équation suivante :

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

b. Calculez les coefficients de Fourier pour la fonction