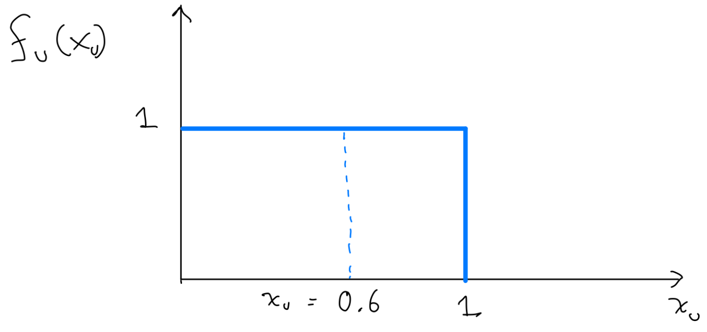
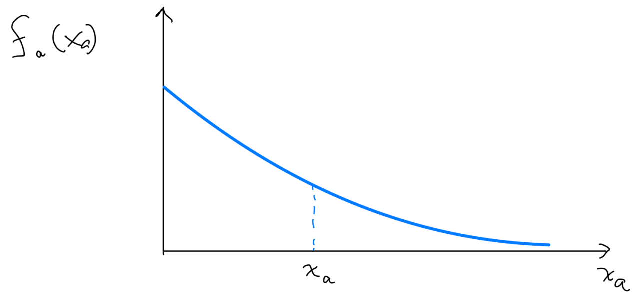
Dérivation de la méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition

Considérez la fonction de répartition uniforme :

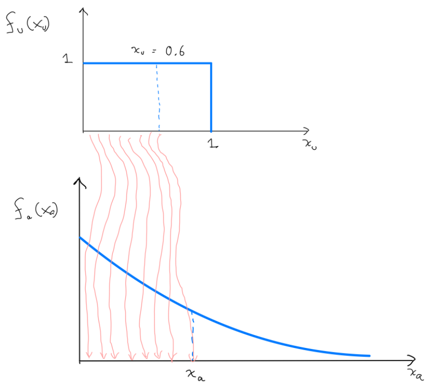


Dans cette figure, nous avons marqué le point $x_u = 0.6$. Pour la distribution uniforme, le nombre de tirages en dessous de 0.6 sera 60% du nombre total de tirages.

Considérons maintenant une distribution différente :



Nous aimerions trouver la valeur de x_a dont le nombre de tirages au dessous de cette valeur pour la distribution $f_a(x_a)$ est aussi 60%. Une fois cette valeur trouvée, nous pourrons associer les tirages en dessous de 0.6 avec les valeurs en dessous de x_a pour la distribution non uniforme comme illustrée à la figure ci-dessous.



Autrement dit, nous cherchons une transformation de 0.6 en x_a pour que la probabilité des tirages en dessous de 0.6 et x_a soit la même.

En ce qui suit, au lieu d'utiliser la valeur 0.6, nous allons utiliser la valeur générale x_u.

Voyons maintenant comment trouver la transformation $x_u \rightarrow x_a$

Le nombre de tirages avec des valeurs entre 0 et x_u est obtenue en multipliant le nombre total de tirages N par la probabilité que les tirages soient dans l'intervalle d'intérêt $(0, x_u]$. Cette probabilité est obtenue en intégrant la densité de probabilité uniforme $f_u(x_u)$ de zéro jusqu'à x_u :

$$Probability\ of\ draws\ up\ to\ x_u = \int_0^{x_u} f_u(x)dx = x_u$$

Notez que la raison pour laquelle les noms des variables qui contiennent des mots sont écrits en anglais puisque l'outil utilisé pour créer les équations n'accepte pas les accents.

Le nombre de tirages dans l'intervalle $(0, x_u]$ est donc

$$Nomber\ of\ draws\ up\ to\ x_u = Nx_u$$

De manière similaire, la probabilité des tirages jusqu'à x_a pour la distribution de probabilités non-uniforme $f_a(x_a)$ est

$$Probability\ of\ draws\ up\ to\ x_a = \int_{-\infty}^{x_a} f_a(x)dx$$

et le nombre de tirages dans l'intervalle $(-\infty, x_a]$ est

$$Nomber\ of\ draws\ up\ to\ x_a = N\int_{-\infty}^{x_a} f_a(x)dx$$

Notez que dans la cas de la distribution $f_a(x_a)$, nous avons intégré depuis $-\infty$ pour que la distribution soit générale et que son support ne soit pas forcément limité à des valeurs positifs de x.

Nous voulons donc trouver la valeur de x_a en fonction de x_u pour que le nombre de tirages pour $x < x_a$ soit égale à celui pour $x < x_u$.

Si on égalise le nombre de tirages dans la distribution uniforme à celui de la distribution non-uniforme, on obtient

$$Nx_u = N\int_{-\infty}^{x_a} f_a(x)dx$$

Nous pouvons diviser cette équation par N et reconnaitre l'intégrale du côté droit comme la fonction de distribution de la densité de probabilité. Effectuant ces changements, nous obtenons

$$x_u = F_a(x_a)$$

Si nous appliquons la fonction inverse F_a^{-1} des deux côtés et nous échangeons les deux côtés, nous obtenons

$$x_a = F_a^{-1}(x_u)$$

Qui est le résultat que nous cherchions.