OSER – Série 2 bis

Matrices

Définitions

Théorie

Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres composé de m lignes et n colonnes.

Une matrice carrée a le même nombre de lignes et de colonnes. On la note matrice $m \times m$.

La matrice identité est un cas particulier de matrice carrée où les éléments de la diagonale valent 1 et les autres 0. On la note I_n, où n est le nombre de lignes ou de colonnes.

Exercices

1. Donner les dimensions des matrices suivantes :

   a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Ecrire des matrices correspondant aux dimensions suivantes :

   a. 4×3

   b. 3×4

   c. 2×2

   d. I_6

Transposition de matrices

Théorie

On obtient la matrice transposée d'une matrice en échangeant ses lignes et ses colonnes. La ligne la plus haute devient la colonne la plus à gauche, etc. On note la matrice transposée d'une matrice A, A^T.

Exercices

3. Transposer les matrices suivantes :

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Addition de matrices

Théorie

Pour que l'on puisse additionner deux matrices, elles doivent avoir les mêmes dimensions. La somme des deux matrices sera également de même dimension.

Le somme de deux matrices M et N est une matrice dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de M et N.

Exercices

4. Effectuer les sommes de matrices suivantes :

   a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Multiplication de matrices

Théorie

Pour que l'on puisse multiplier deux matrices le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

Le produit d'une matrice de dimension $m \times p$ et d'une matrice de dimension $p \times n$ sera une matrice de dimension $m \times n$.

Chaque élément de la matrice contenant le résultat est obtenu en multipliant une ligne de la première matrice avec une colonne de la deuxième matrice.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

Exercices

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$