OSER – Série 2 – Corrigé

Contrôle d'erreurs partie 2

Code de Hamming

1. Soit une matrice P = $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Calculer les mots de code à partir des données ci-dessous :

$$H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

   a. [0 0 1] * H = [0 0 1 0 1 1]
   b. [1 0 1] * H = [1 0 1 1 1 0]
   c. [0 1 1] * H = [0 1 1 1 0 1]

2. Soit une matrice P = $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Calculer les mots de code à partir des données ci-dessous :

$$H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

   a. [1 1 0 1] * H = [1 1 0 1 0 0 1]
   b. [0 1 0 1] * H = [0 1 0 1 1 1 1]
   c. [1 0 0 0] * H = [1 0 0 0 1 1 0]

3. Soit une matrice P = $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Pour les mots de codes suivants, dire s'ils contiennent ou non des erreurs :

$$H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

   a. [0 0 0 1 1 0] * G = [1 1 0] → erreur
   b. [1 0 0 0 1 1] * G = [0 1 0] → erreur
   c. [1 1 1 0 1 0] * G = [0 0 0] → pas d'erreur

4. Les matrices génératrices suivantes ont été utilisées pour générer des mots de code. Calculer leur rendement et évaluer si le nombre de bits de contrôle est adapté:

   d. H = $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ → $m = 2, r = 4$

$$Rendement = \frac{2}{2+4} = 33.33\%$$

$Nombre\ de\ bits\ de\ contrôle: m + r + 1 \leq 2^r$ → $2 + 4 + 1 < 2^4$ → ok

$2 + 3 + 1 < 2^3$ → 3 bits de contrôle auraient suffi et le rendement aurait été meilleur.

e. H = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ → $m = 4, r = 2$

$$Rendement = \frac{4}{4+2} = 66.67\%$$

$Nombre\ de\ bits\ de\ contrôle: m + r + 1 \leq 2^r$ → $4 + 2 + 1 > 2^2$ → r trop petit

$4 + 3 + 1 = 2^3$ → Il aurait fallu mettre 3 bits de contrôle.

f. H = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ → $m = 3, r = 3$

$$Rendement = \frac{3}{3+3} = 50\%$$

$Nombre\ de\ bits\ de\ contrôle: m + r + 1 \leq 2^r$ → $3 + 3 + 1 < 2^3$ → ok

5. Soit une matrice P = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pour le code utilisant cette matrice, calculer :

a. L'ensemble des mots de codes qui peuvent être générés

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Données	**Mots de code**
0000	00000000
0001	00011001
0010	00100011
0011	00111010
0100	01001010
0101	01010011
0110	01101001
0111	01110000

Données	**Mots de code**
1000	10000110
1001	10011111
1010	10100101
1011	10111100
1100	11001100
1101	11010101
1110	11101111
1111	11110110

b. Le nombre d'erreurs détectables

$$Distance\ minimale = 3; 3 - 1 = 2\ erreurs\ détectables.$$

c. Le nombre d’erreurs corrigibles

$$Distance\ minimale = 3; \frac{3-1}{2} = 1\ erreur\ corrigible.$$

d. Le rendement

$$m = 4, r = 4, \qquad Rendement = \frac{4}{4+4} = 50\ \%$$

e. Si le nombre de bits est adapté

$$m + r + 1 \leq 2^r,\ 4 + 4 + 1 < 2^4 \rightarrow \text{adapté}$$